Для комплекса K_{32}° доказана

Т е о р е м а 4.4. Характеристические многообразие эллипсоида $\widehat{Q}$ содержится в касательной плоскости к поверхности Φ.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.о-ва,1953,т.2,с.275-382.

2. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия.- Revue de mathématiques pure et appliques, Acad. RPR, VII,№ 2,1962,с.231-240.

3. К р е т о в М.В. Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10,Калининград,1979,с.41-47.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм.Калининград,1978.

5. М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1974,6,с.113-133.

6. К р е т о в М.В. Об одном комплексе центральных квадрик с вырождающимся многообразием центров.Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии.г.Минск,1979,с.99.

С.В.М а л а х о в с к а я

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМ АВТОПОЛЯРНЫМ ТЕТРАЭДРОМ

В трехмерном проективном пространстве рассмотрим частный класс $\mathfrak{A}$ конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик Q, четыре фокальные поверхности которых описаны вершинами автополярного тетраэдра третьего рода квадрики Q .Показано,что две фокальные поверхности конгруэнции $\mathfrak{A}$ являются квадриками.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathfrak{A}$ называется конгруэнция квадрик Q в P_3, обладающая следующими свойствами: 1/существуют четыре фокальные поверхности $[1](A_\alpha)(\alpha=0,1,2,3)$ такие,что A_0A_i и A_3A_i -прямолинейные образующие квадрики Q ($i,j,k=1,2$), 2/поверхности (A_0) и (A_3) не вырождаются в линии и не являются плоскостями,причем прямые A_0A_i и A_3A_i -асимптотические касательные соответственно на (A_0) и (A_3) ,3/на квадрике Q не существует фокальных прямолинейных образующих и фокальных коник.

Т е о р е м а 1. Существуют два и только два класса конгруэнций $\mathfrak{A}$:конгруэнции $\mathfrak{A}_1$,определяемые с произволом одной функции двух аргументов,и конгруэнции $\mathfrak{A}_2$, определяемые с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Относя конгруэнцию $\mathfrak{A}$ к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$ и учитывая условия 1,2,3 определения 1 приводим систему пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathfrak{A}$ к виду:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (1+c)\,\omega^j,$$

$$\omega_3^i = b_k^i \omega^k, \quad \omega_i^0 = (1+m)\,\omega_3^j, \quad \Omega = h_k \omega^k, \tag{1}$$

$$dc + (1+c)\Omega = 0, \qquad dm + (1+m)\Omega = 0,$$

причем

$$(m-c)\,b_j^i = 0, \quad (m-c)(b_1^1 - b_2^2) = 0, \tag{2}$$

$$(1+c)(1+m) \neq 0, \tag{3}$$

$$\Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \quad \omega^i = \omega_0^i.$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.Формч Пфаффа ω_α^β являются компонентами деривационных формул репера R .

Из (2) вытекают два и только два случая: $m - c \neq 0$, $b_2^1 = b_1^2 = b_1^1 - b_2^2 = 0$ (конгруэнции $\mathfrak{A}_1$) и $m - c = 0$(конгруэнции $\mathfrak{A}_2$).Учитывая эти конечные соотношения в уравнениях (1),убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2.Конгруэнции $\mathfrak{A}_1$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/поверхности (A_0) и (A_3) являются линейчатыми квадриками,асимптотические линии на них соответствуют;2/поверхности (A_i) вырождаются в плоские линии,касательные к которым пересекаются в точке ребра A_0A_3 ;3/конгруэнция (A_0A_3) вырождается в связку прямых,а конгруэнция (A_1A_2)– в двупараметрическое семейство прямых на плоскости; 4/точки A_i являются двукратными фокальными точками квадрики Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathfrak{A}_1$ имеет вид:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = 0, \quad dc + (1+c)\Omega = 0,$$

$$dm + (1+m)\Omega = 0, \quad \Omega = h_k \omega^k, \quad \omega_i^3 = (1+c)\,\omega^j, \tag{4}$$

$$\omega_3^i = b\,\omega^i, \quad db + b(\omega_0^0 - \omega_3^3) = 0, \quad \omega_i^0 = (1+m)\,\omega_3^j;$$

I/Уравнения квадрик Ли поверхностей (A_0) и (A_3) имеют соответственно вид:

$$\mathcal{F}_0 \equiv 2(1+c)^2 x^1 x^2 - 2(1+c)\,x^0 x^3 + b(m-c)(x^3)^2 = 0, \tag{5_1}$$

$$\mathcal{F}_3 \equiv 2b(1+m)^2 x^1 x^2 - 2b(1+m)\,x^0 x^3 + (c-m)(x^0)^2 = 0. \tag{5_2}$$

Так как $d\mathcal{F}_0 = (2\theta + 3\omega_1^1 + 3\omega_2^2)\mathcal{F}_0$, $d\mathcal{F}_3 = (2\theta + 3\omega_1^1 + 3\omega_2^2)\mathcal{F}_3$, то это инвариантные квадрики,совпадающие соответственно с поверхностями (A_0) и (A_3).

2/Имеем: $dA_i = \omega_i^i A_i + \omega^i C$, где $C = b(1+m)A_0 + (1+c)A_3$. Следовательно, (A_i) -линии.Так как $dC = (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0)C +$

$$+\, b(2+m+c)(\omega^1 A_1 + \omega^2 A_2),$$

то (A_i)-плоские линии.

3/Рассмотрим точку $B = bA_0 - A_3$.Так как $dB = \omega_3^3 B$, то это инвариантная точка,через которую проходят прямые конгруэнции (A_0A_3).Плоскость (A_1A_2C) инвариантная. Ей принадлежат все прямые конгруэнции (A_1A_2).

4/Используя систему уравнений для определения фокальных точек квадрики $Q \in \mathfrak{A}_1$,убеждаемся,что A_i - двукратные фокальные точки.

Т е о р е м а 3.Поверхности (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathfrak{A}_2$ являются одной и той же линейчатой квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Квадрики Ли поверхностей (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathfrak{A}_2$ определяются одним и тем же уравнением

$$\mathcal{F} \equiv (1+c)\,x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0.$$

Так как $d\mathcal{F} = (2\theta - \omega_0^0 - \omega_3^3)$,то это инвариантная квадрика,совпадающая с поверхностями (A_0) и (A_3) .

Т е о р е м а 4. Точка A_i тогда и только тогда является двукратной фокальной точкой конгруэнции $\mathfrak{A}_2$, когда поверхность (A_i) вырождается в линию.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Рассматривая систему уравнений для определения фокальных точек квадрики $Q \in \mathfrak{A}_2$ убеждаемся,что характеристическим признаком двукратности фокальной точки A_i является условие $b_i^j = 0$, которое характеризует вырождение поверхности (A_i) в линию.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геом.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, 113-133.

2. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.

Н.А. М и р о ш к и н а

ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРЯМЫХ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_5

В статье дана фокальная классификация трехпараметрических семейств прямых в P_5 по кратности фокусов и наличию голономных фокальных двухпараметрических подсемейств.

Отнесем пространство P_5 к проективному реперу A_α $(\alpha,\beta,\gamma=0,1,\dots,5)$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера и уравнения структуры имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta, \qquad (1)$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \qquad (2)$$

Рассмотрим произвольную прямую L_1 трехпараметрического семейства прямых $(L_1)_3$. Определим ее точками A_i репера ($i,j=0,1$). Считая точку A_0 неособой, можно формы ω_0^p $(p,q=2,3,4)$ принять за базисные. Трехпараметрические семейства прямых можно трактовать как линейчатую гиперповерхность V_{1+3} в P_5. Поместим точки A_i, A_p репера в гиперплоскость, касательную к поверхности в точке A_0. Тогда уравнения семейства будут иметь вид:

$$\omega_1^a=\ell_{1q}^a\,\omega_0^q, \qquad \omega_0^5=0 \qquad (a,b=2,3,4,5). \ (3)$$

Однопараметрическое подсемейство называется торсом, если в этом подсемействе бесконечно близкие прямые пе-